5M

УДК 364.3:61

В.П. Марценюк, Н.Я. Климук
Тернопольский государственный медицинский университет имени И.Я. Горбачевского, г. Тернополь, Украина

Расчет актуарных показателей в эпидемиологической модели страхования

В работе для эпидемиологической компартментной модели введены и получены аналитические представления для актуарных текущих стоимостей. Такие величины введены для каждого из компартментов SLIAR-модели. При этом рассматриваются два вида страховых планов – как с непрерывной выплатой страховой суммы в течение лечения, так и с разовой выплатой. Для каждого из планов получено представление для уровней премии.

Введение

В последние годы был внесен значительный вклад в математическое моделирование переносимых заболеваний [1]. В этом заслуга организаторов здравоохранения, специалистов по математической эпидемиологии и статистике [1-3]. Спектр исследований охватывает диапазон от анализа экспериментальных данных [1] до теории дифференциальных уравнений [3]. Был достигнут определенный прогресс в анализе клинических данных и эффективном прогнозировании. В то же время не было уделено адекватного внимания моделированию медицинского страхования на случай инфекционных заболеваний.

Главной идеей данного исследования является внедрение экономической составляющей в эпидемиологические модели с целью финансовых и медицинских прогнозов в процессе защиты застрахованного населения от инфекционных заболеваний.

В эпидемиологических исследованиях вся популяция разделяется на компартменты, которые обозначаются как S, L, I, A, R. Класс S обозначает группу индивидуумов без иммунитета, т.е. уязвимых для определенного заболевания. Класс L обозначает группу латентных лиц, то есть таких, в организм которых вследствие контакта с симптоматически или асимптоматически инфицированными попал вирус, который сейчас находится в латентном состоянии и не может быть распространен на другие организмы. Классы I и A обозначают группы симптоматически и асимптоматически инфицированных лиц, R – лица, которые выздоровели.

Делаются следующие биологические предположения.

1. В модели считается, что смертность в результате заболевания является исключительно малой и ею можно пренебречь, а естественная смертность полностью покрывается естественной рождаемостью μ.

2. Размер популяции считается постоянным, т.е.

$$S(t) + L(t) + I(t) + A(t) + R(t) = N = const, \quad \forall t \geq 0 .$$

3. Произвольное лицо делает определенное среднее постоянное число β контактов с другими индивидуумами за единицу времени. На основании таких предположений приходим к эпидемиологической модели:

$$\begin{aligned} S'(t) &= \mu(N - S(t)) - S(t)\beta(I(t) + \delta A(t)), \\ L'(t) &= S(t)\beta(I(t) + \delta A(t)) - (\mu + \kappa)L(t), \\ I'(t) &= \rho\kappa L(t) - (\mu + \alpha)I(t), \\ A'(t) &= (1-\rho)\kappa L(t) - (\mu + \eta)A(t), \\ R(t) &= N - S(t) - L(t) - I(t) - A(t), \quad t \ge 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Целью данного исследования является разработка актуарной модели. Заметим, что введенные выше компартменты играют существенно различные роли в модели страхования. Так, уязвимые индивидуумы сталкиваются с риском инфицирования во время эпидемии и каждый из них платит определенную страховую премию в страховой фонд с целью будущего покрытия расходов на лечение в результате инфицирования. Во время заболевания симптоматически инфицированные лица требуют страховой суммы, предусмотренной в полисе. В результате летального исхода страховая сумма будет выплачена бенефициару, указанному в полисе. Цель состоит в надлежащем управлении страховым фондом на определенном уровне.

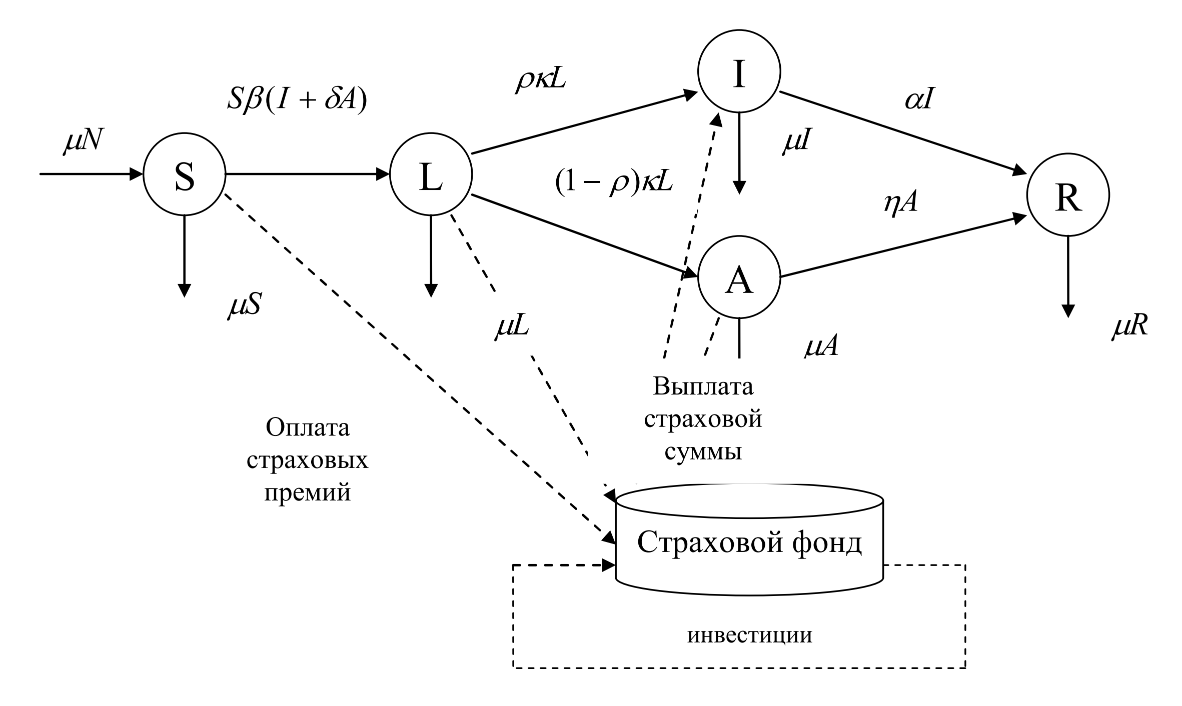


Рисунок 1 – Диаграмма переходных состояний в эпидемиологической модели страхования

Актуарный анализ

Идея полиса на случай инфекционного заболевания является подобной страхованию жизни и элементарного страхования.

Сначала перейдем в эпидемиологической модели подобно тому, как это делается в демографии, от абсолютных величин $S(t), L(t), I(t), A(t), R(t)$ к их частям $s(t),\ l(t), i(t), a(t), r(t)$ от общего размера популяции N. Имеем модель:

$$\begin{aligned} s'(t) &= \mu(1 - s(t)) - \beta N s(t)\,(i(t) + \delta a(t)), \\ l'(t) &= \beta N s(t)\,(i(t) + \delta a(t)) - (\mu + \kappa) l(t), \\ i'(t) &= \rho\kappa l(t) - (\mu + \alpha) i(t), \\ a'(t) &= (1 - \rho)\kappa l(t) - (\mu + \eta) a(t), \\ r(t) &= 1 - s(t) - l(t) - i(t) - a(t), \quad t \ge 0, \\ s(0) &= s_0,\ l(0) = l_0,\ i(0) = i_0,\ a(0) = a_0, \\ & s_0 + l_0 + i_0 + a_0 = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

Поскольку все эти долевые функции изменяются в пределах от 0 до 1, то можно интерпретировать $s(t),\ l(t), i(t), a(t), r(t)$ как вероятности индивидуума быть в момент времени t уязвимым, латентным, симптоматически или асимптоматически инфицированным, выздоровевшим. Однако следует иметь в виду, что согласно закону действия масс перемещение между компартментами зависит от размеров каждого из них. Следовательно, такие вероятности представляют собой взаимосвязанные риски в противоположность независимым рискам, которые можно увидеть в моделях страхования жизни. Далее с помощью этих вероятностных функций $s(t),\ l(t), i(t), a(t), r(t)$ будут предложены актуарные методы для страхования на случай инфекционных заболеваний.

Аннуитет с непрерывной выплатой страховой премии в течение всего периода лечения

Предположим, что план защиты на случай инфекционного заболевания работает в форме простого аннуитета. А именно, индивидуальные страховые премии собираются постоянно до тех пор, пока застрахованное лицо остается несимптоматически инфицированным, тогда как страховая сумма непрерывно выплачивается каждому симптоматически инфицированному владельцу полиса в течение всего периода лечения. Когда индивидуум выздоравливает, страховая защита сразу же прекращается. В соответствии с международными актуарными обозначениями введем понятие актуарной текущей стоимости (АТС).

Определение 1. Обозначим через T случайную величину времени до наступления страхового случая (в нашем случае – инфицирования) для индивидуума возраста x. Тогда случайной величиной текущей стоимости совокупной страховой услуги при условии разовой выплаты при наступлении страхового случая называется величина:

$$Z(T) = e^{-\delta T},$$

где δ – сила заинтересованности.

Определение 2. Актуарной текущей стоимостью для человека в возрасте x называется математическое ожидание случайной величины текущей стоимости Z обозначается $\overline{A}_x$. Она может быть вычислена как:

$$\overline{A}_x = E(Z) = \int_0^\infty Z(t) f_T(t)\,dt - \int_0^\infty e^{-\delta t} f_T(t)\,dt$$

где f_T – функция плотности распределения T.

Обозначим АТС страховых премий от застрахованного лица за все время эпидемии через $\overline{A}_0^{class}$, где *class* – указывает на компартмент лица, участвующего в страховых платежах или выплатах.

АТС страховых выплат симптоматически инфицированных пациентов от страховщика обозначим через $\overline{A}_0^i$.

Итак, с точки зрения дебита страхового продукта совокупные будущие выплаты задаются как

$$\overline{A}_0^i = \int_0^\infty e^{-\delta t} i(t)\, dt\,. \quad (3)$$

С другой стороны, совокупные будущие премии состоят из:

$$\overline{A}_0^s = \int_0^\infty e^{-\delta t} s(t)\, dt\,,$$

$$\overline{A}_0^l = \int_0^\infty e^{-\delta t} l(t)\, dt\,, \quad (4)$$

$$\overline{A}_0^a = \int_0^\infty e^{-\delta t} a(t)\, dt\,.$$

Основным принципом актуарной математики для установления уровня премии является принцип эквивалентности, который требует:

E [текущая стоимость страховых расходов] =
= E [текущая стоимость страховых платежей].

Следовательно, уровень премии для страхового плана по выплатам на протяжении всего периода лечения составляет:

$$\overline{P} = \frac{\overline{A}_0^i}{\overline{A}_0^s + \overline{A}_0^l + \overline{A}_0^a}\,. \quad (5)$$

Утверждение 1. Для системы (2) имеет место следующее соотношение:

$$(1+\frac{\mu}{\delta})\overline{A}_0^s + (1+\frac{\mu}{\delta})\overline{A}_0^l + (1+\frac{\mu+\alpha}{\delta})\overline{A}_0^i + (1+\frac{\mu+\eta}{\delta})\overline{A}_0^a = 1+\mu\,. \quad (6)$$

Доказательство. Из уравнения модели (2) имеем:

$$\begin{gathered} s'(t)+l'(t)+i'(t)+a'(t)+r'(t) = \\ = \mu(1-s(t)) - \mu l(t) - (\mu+\alpha)i(t) - (\mu+\eta)a(t),\ t \ge 0 \end{gathered} \quad (7)$$

Интегрируя (7) от 0 до t, получаем:

$$\begin{gathered} s(t)+l(t)+i(t)+a(t)-1 = \\ = \mu t - \mu\int_0^t s(\theta)d\theta - \mu\int_0^t l(\theta)d\theta - (\mu+\alpha)\int_0^t i(\theta)d\theta - (\mu+\eta)\int_0^t a(\theta)d\theta, \qquad t \ge 0. \end{gathered} \quad (8)$$

Далее умножаем (8) на $e^{-\delta t}$ и проинтегрируем относительно t в пределах от 0 до ∞.

Имеем:

$$\begin{gathered} \overline{A}_0^s + \overline{A}_0^l + \overline{A}_0^i + \overline{A}_0^a - 1 = \mu - \frac{\mu}{\delta}\overline{A}_0^s - \frac{\mu}{\delta}\overline{A}_0^l - \\ - \frac{(\mu+\alpha)}{\delta}\overline{A}_0^i - \frac{\mu+\eta}{\delta}\overline{A}_0^a. \end{gathered} \quad (9)$$

Здесь, в правой части (9), использовано изменение порядка интегрирования и интегрирование по частям. А именно:

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}\int_0^t s(\theta)d\theta\,dt=\int_0^\infty\int_0^t e^{-\delta t}s(\theta)d\theta\,dt=-\frac{1}{\delta}\int_0^t\int_0^\infty s(\theta)\,d(e^{-\delta t})d\theta=$$
$$=-\frac{1}{\delta}\int_0^\infty\int_0^t s(\theta)\,d\theta d(e^{-\delta t})=\frac{1}{\delta}\overline{A}_0^s. \tag{10}$$

Для других слагаемых в (9) использованы те же преобразования. Из (9) непосредственно вытекает (6). Из утверждения 1 непосредственно вытекают следующие результаты.

Следствие 1. Имеет место следующее соотношение для определения уровня премии для страхового плана по выплате в течение всего периода лечения, которое не зависит от АТС выплат:

$$\overline{P}=\overline{P}(\overline{A}_0^s,\overline{A}_0^l,\overline{A}_0^a)=\frac{1+\mu-\frac{\eta}{\delta}\overline{A}_0^a-(1+\frac{\mu}{\delta})(\overline{A}_0^s+\overline{A}_0^l+\overline{A}_0^a)}{\overline{A}_0^s+\overline{A}_0^l+\overline{A}_0^a}. \tag{11}$$

Следствие 2. В общем случае системы (2) уровень премии для страхового плана с выплатами в течение всего периода лечения является функцией только от $\overline{A}_0^i$ и $\overline{A}_0^a$, а именно:

$$\overline{P}=\overline{P}(\overline{A}_0^i,\overline{A}_0^a)=\frac{(1+\frac{\mu}{\delta})\overline{A}_0^i}{1+\mu-\frac{\eta}{\delta}\overline{A}_0^a-(1+\frac{\mu+\alpha}{\delta})\overline{A}_0^i}. \tag{12}$$

Следствие 3. В случае, если $\eta=0$, то уровень премии для страхового плана с выплатами в течение всего периода лечения является функцией только от $\overline{A_0^i}$:

$$\overline{P}=\overline{P}(\overline{A}_0^i)=\frac{(1+\frac{\mu}{\delta})\overline{A}_i^0}{1+\mu-(1+\frac{\mu+\alpha}{\delta})\overline{A}_0^i}. \tag{13}$$

Заметим, что следствие 3 может иметь такие актуарные трактовки: условие $\eta=0$ может рассматриваться не как отсутствие выздоровевших из числа асимптоматически инфицированных, а, скорее, описывает ситуацию, когда индивидуумы не попадают в копмартмент R в связи с незнанием своего собственного диагноза при отсутствии симптомов и дальше продолжают платить страховые платежи (премии).

Аннуитет с разовой выплатой страховой суммы

Аналог такого плана происходит также в страховании жизни. Если застрахованное лицо диагностируется как инфицированное и подлежит госпитализации, то выплаты на лечение выплачиваются в виде страховой суммы немедленно, и страхование на этом прекращается. В таком случае АТС страховых выплат симптоматически инфицированным лицам может быть вычислена как:

$$\hat{A}_0^i=\int_0^\infty e^{-\delta t}[\rho\kappa l(t)-(\mu+\alpha)i(t)]dt=\rho\kappa\overline{A}_0^l-(\mu+\alpha)\overline{A}_0^i, \tag{14}$$

поскольку вероятность быть симптоматично инфицированным во время t определяется из третьего уравнения системы (2).

Утверждение 2. АТС определяется через начальные значения s_0 и l_0 следующим соотношением:

$$\hat{A}_0^i = \frac{\rho\kappa}{\delta(\mu+\kappa)} - \frac{\rho\kappa}{\mu+\kappa}\overline{A}_0^s + \frac{\rho\kappa}{\mu+\kappa}(s_0+l_0) + \frac{\delta\rho\kappa}{\mu+\kappa}(\overline{A}_0^s + \overline{A}_0^l) - (\mu+\alpha)\overline{A}_0^i. \qquad (15)$$

Доказательство. Следует из (14), представив $\overline{A}_0^l$ таким образом:

$$\overline{A}_0^l = \int_0^\infty e^{-\delta t} l(t)dt = \frac{1}{(\mu+\eta)}\int_0^\infty e^{-\delta t}[\beta N s(t)(i(t)+\delta a(t)) - l'(t)]dt =$$

$$= \frac{1}{\mu+\eta}\int_0^\infty e^{-\delta t}[\mu(1-s(t)) - s'(t) - l'(t)]dt =$$

$$= \frac{1}{\mu+\eta}\int_0^\infty e^{-\delta t}\mu dt - \frac{1}{\mu+\kappa}\overline{A}_0^s - \frac{1}{\mu+\kappa}\int_0^\infty e^{-\delta t}s'(t)dt - \frac{1}{\mu+\kappa}\int_0^\infty e^{-\delta t}l'(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\delta(\mu+\kappa)} - \frac{1}{\mu+\kappa}\overline{A}_0^s - \frac{1}{\mu+\kappa}e^{-\delta t}s(t)\Big|_0^\infty + \frac{\delta}{\mu+\kappa}\int_0^\infty s(t)e^{-\delta t}dt -$$

$$- \frac{1}{\mu+\kappa}e^{-\delta t}l(t)\Big|_0^\infty + \frac{\delta}{\mu+\kappa}\int_0^\infty l(t)e^{-\delta t}dt =$$

$$= \frac{1}{\delta(\mu+\kappa)} - \frac{1}{\mu+\kappa}\overline{A}_0^s + \frac{1}{\mu+\kappa}s_0 + \frac{\delta}{\mu+\kappa}\overline{A}_0^s + \frac{1}{\mu+\kappa}l_0 + \frac{\delta}{\mu+\kappa}\overline{A}_0^l.$$

Здесь использованы первые два уравнения системы (2) и интегрирование по частям.

Следствие 4. Уровень премии для страхового плана с разовой выплатой страховой суммы зависит от s_0 и l_0 и составляет:

$$\overline{P} = \frac{\hat{A}_0^i}{\overline{A}_0^s + \overline{A}_0^l + \overline{A}_0^a} = \frac{1}{\overline{A}_0^s + \overline{A}_0^l + \overline{A}_0^a}\Big[\frac{\rho\kappa}{\delta(\mu+\kappa)} - \frac{\rho\kappa}{\mu+\kappa}\overline{A}_0^s + \frac{\rho\kappa}{\mu+\kappa}(s_0+l_0) +$$

$$+ \frac{\delta\rho\kappa}{\mu+\kappa}(\overline{A}_0^s + \overline{A}_0^l) - (\mu+\alpha)\overline{A}_0^i\Big]. \qquad (16)$$

Выводы

Итак, в работе предложены методики разработки страховых планов путем рассмотрения детерминированной эпидемиологической модели распространения инфекционного заболевания. Введены определения АТС страховых выплат и платежей для различных компартментов эпидемиологической модели. Предложены методики расчета уровня премии для двух типов страховых планов – с непрерывными выплатами в течение всего лечения и разовой выплатой страховой премии.

Литература

1. Андрейчин М.А. Проблемы гриппа A/H1N1: прошлое и современность / М.А. Андрейчин, В.С. Копча // Инфекционные болезни. – № 4. – 2009. – С. 5-19.
2. Марценюк В.П. Информационно-статистический подход к моделированию распространения инфекционного заболевания на примере эпидемии ОРЗ в период октябрь – ноябрь 2009 года в

Тернопольской области / В.П. Марценюк, Н.В. Цяпа, М.О. Кашуба // Инфекционные болезни. – 2009. – № 4. – С. 50-59.
3. Марценюк В.П. SIR-моделирования эпидемии острых респираторных заболеваний / В.П. Марценюк, Н.В. Цяпа // Медицинская информатика и инженерия. – 2009. – № 4. – С. 65-69.

Literatura

1. Andreichin M.A. Problemy grippa A/H1N1: proshloe i sovremennost' / M.A. Andreichin, V.S. Kopcha Infekcionnye bolezni. № 4. 2009. S.5-19.
2. Marcenyuk V.P. Informacionno-statisticheskii podhod k modelirovaniyu rasprostranenie infekcionnogo zabolevaniya na primere epidemii ORZ v period oktyabr'-noyabr' 2009 goda v Ternopol'skoi oblasti / V.P. Marcenyuk, N.V. Cyapa, M.O. Kashuba // Infekcionnye bolezni. № 4. 2009. S. 50-59.
3. Marcenyuk V.P., Cyapa N.V. SIR-modelirovaniya epidemii ostryh respiratornyh zabolevanii Medicinskaya informatika i injeneriya. № 4. 2009. S. 65-69.

В.П. Марценюк, Н.Я. Климук.
Розрахунок актуарних показників в епідеміологічній моделі страхування
У роботі для епідеміологічної компартментної моделі введено та отримано аналітичні представлення для актуарних поточних вартостей. Такі величини введено для кожного з компартментів SLIAR-моделі. При цьому розглядаються два види страхових планів – як з неперервною виплатою страхової суми протягом лікування, так і з разовою виплатою. Для кожного з планів отримано представлення для рівнів премії.

V.P. Martsenyuk, N.Ya. Klymuk
On Actuarial Indices in Epidemiological Insurance Model
In the work there are determined and obtained analytic presentations of actuarial present values for epidemiological compartmental model. Such values are determined for each compartment of SLIAR-model. Here there are considered two kinds of annuities both continuous insurance benefits during treatment and one lump sum. For each of annuities there are obtained presentations for levels of premium.

Статья поступила в редакцию 08.08.2011.